Brèves communications - Kurze Mitteilungen
Brevi comunicazioni - Brief Reports

Les auteurs sont seuls responsables des opinions exprimées dans ces communications. – Für die kurzen Mitteilungen ist ausschließlich der Autor verantwortlich. – Per le brevi comunicazioni è responsabile solo l'autore. – The editors do not hold themselves responsible for the opinions expressed by their correspondents.

Die symmetrische Kugelzone als extremaler Rotationskörper

Der wesentlichste, auf die klassischen Untersuchungen von H. BRUNN[1] und H. MINKOWSKI[2] zurückgehende Teil der Theorie der konvexen Körper des dreidimensionalen Raumes erstreckt sich über die Maßgeometrie von drei fundamentalen Maßzahlen, nämlich des Volumens V, der Oberfläche F und des Integrals der mittleren Krümmung M (kurz Krümmungsintegral), welche jedem konvexen Körper zukommen.

Betrachten wir nun die Klasse $K\,(V, F)$ aller konvexen Körper, welche ein vorgeschriebenes Volumen V und eine ebensolche Oberfläche F aufweisen — hierbei ist zu beachten, daß nach der isoperimetrischen Ungleichung

$$F^3 \geqq 36\,\pi\,V^2 \qquad (*)$$

gewählt werden muß –, so folgt aus den Ungleichungen, welche durch die BRUNN-MINKOWSKIsche Theorie geliefert werden, daß alle Körper aus $K\,(V, F)$ ein Krümmungsintegral M besitzen, für welches

$$M \leqq \frac{F^2}{3\,V} \qquad (\mathrm{I})$$

gilt. Hier gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn es sich um einen Kappenkörper der Kugel handelt. Von den verschiedenen Kappenkörpern, welche sich mit den vorgeschriebenen V und F bilden lassen, kann man insbesondere den symmetrischen Rotationskörper herauswählen, dessen Profil in Abb. 1 dargestellt ist.

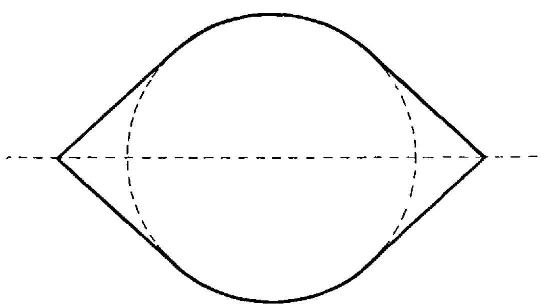

Abb. 1.

Der hier erklärte Sachverhalt lehrt uns, daß die rechte Seite in Ungleichung (I) die genaue obere Schranke der Menge aller M darstellt, welche den der Klasse $K\,(V, F)$ angehörenden Körpern zukommen. Der Kappenkörper ist der zugehörende extremale Körper, welcher das absolute Maximum des Krümmungsintegrals liefert.

Unter Ansehen der intensiven Weiterentwicklung der klassischen Theorie, durch welche die Lehre der drei Fundamentalzahlen der konvexen Körper in den letzten Dezennien bedeutend vertieft und verallgemeinert wurde, ist es immerhin erstaunlich, daß die dem oben geschilderten Problem dual gegenüberstehende Extremalaufgabe u. W. noch keine Lösung gefunden hat. In der Tat: die Menge der M aller Körper der Klasse $K\,(V, F)$ hat eine exakte untere Schranke. Die entsprechende Ungleichung

$$M \geqq \;? \qquad (\mathrm{II})$$

fehlt. Welche Körper liefern bei festen V und F das absolute Minimum von M?

W. BLASCHKE[1] u. a.[2] haben wiederholt diese Frage aufgeworfen. Die Unterzeichneten haben in gemeinsamer Arbeit dieses Problem, dessen allgemeine Behandlung ziemliche Schwierigkeiten bietet, behandelt und können mit dieser Mitteilung eine Teillösung bekanntgeben. Es ist im Hinblick darauf, daß der der MINKOWSKIschen Ungleichung (I) entsprechende Extremalkörper als Rotationskörper realisiert werden kann, durchaus naheliegend, sich zunächst auf Rotationskörper zu beschränken. Die obenerwähnte Klasse $K\,(V, F)$ ersetzen wir durch die Klasse $K_0\,(V, F)$ der konvexen Rotationskörper, welche ein vorgeschriebenes Volumen V und eine ebensolche Oberfläche F – unter Beachtung von (*) – aufweisen. Es ist nach den obigen Darlegungen klar, daß die Ungleichung (I) in $K_0\,(V, F)$ unverändert exakt gilt. Bezüglich dieser engeren Klasse kann nun die ihr dual entsprechende Ungleichung (II) angegeben werden. Sie ist jedoch bedeutend komplizierter als die MINKOWSKIsche, insbesondere transzendent und lautet:

$$M \geqq \sqrt{\frac{2\,\pi\,F}{\sin^2\varphi + 2\cos\varphi}}\,(2\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)\,,$$

worin $\cos\varphi = \xi$ $(0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2})$ die einzige im Intervall $0 \leqq \xi \leqq 1$ liegende Lösung der Gleichung

$$\frac{(3\,\xi - \xi^3)^2}{(1 + 2\,\xi - \xi^2)^3} = \frac{18\,\pi\,V^2}{F^3}\;\left(\leqq \tfrac{1}{2}\right)$$

bedeutet.

Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn es sich um die symmetrische Kugelzone handelt.

Dieses Ergebnis wird am einfachsten ausgedrückt durch den

Satz: Unter allen konvexen Rotationskörpern mit vorgeschriebenem Volumen und Oberfläche weist die symmetrische Kugelzone das kleinstmögliche Integral der mittleren Krümmung auf.

Die symmetrische Kugelzone, deren Profil durch Abb. 2 wiedergegeben wird, erscheint somit als der dem Kappenkörper dual gegenüberstehende Extremalkörper.

Um den Wertevorrat der Maßzahlen V, F und M klar überblicken zu können, ist es zweckmäßig, einen Körper als Punkt einer Diagrammebene mit den kartesischen Koordinaten

$$x = \frac{4\,\pi\,F}{M^2}\,,\quad y = \frac{48\,\pi^2\,V}{M^3}$$

[1] H. BRUNN, *Über Ovale und Eiflächen* (Diss. München, 1887).

[2] H. MINKOWSKI, Math. Ann. *57*, 447 (1903); Ges. Abh. Bd. 2, 230—276; *Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs*, Ges. Abh. Bd. 2, 131—229.

[1] W. BLASCHKE, Jber. Dtsch. Math. Ver. *25*, 125 (1917.)

[2] H. HADWIGER, El. Math. *2*, 51 (1947). – T. BONNESEN und W. FENCHEL, Ergebn. Math. *3*, 84 (1934).

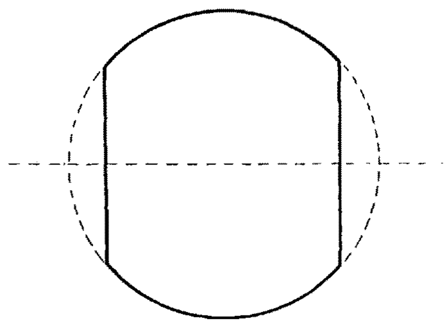

Abb. 2.

Tafel der Kurvensteigungen in den Eckpunkten A, B, C.

	A	B	C
Kappenkörper. . . .	0	2	—
Zylinder	0	—	$\frac{6}{\pi - 2}$
Kugelzone	—	6	$\frac{6}{\pi - 2}$
Torotop	—	3	$\frac{12}{\pi^2 - 8}$
Kugellinse	—	3	∞

darzustellen. Damit erhält man eine Darstellung der Körper, welche gegenüber Ähnlichkeitsabbildungen invariant ist, nämlich das BLASCHKEsche Diagramm[1]. Denken wir uns für jeden konvexen Rotationskörper den Diagrammpunkt eingetragen, so entsteht eine abgeschlossene und zusammenhängende Punktmenge, welche in Abb. 3 durch das schattierte Flächenstück wiedergegeben wird.

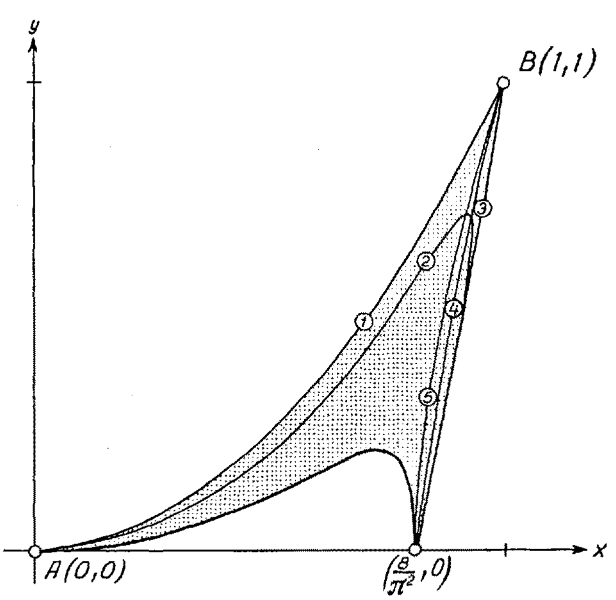

Abb. 3. ① Kurve der Kappenkörper
② Kurve der geraden Kreiszylinder
③ Kurve der symmetrischen Kugelzonen
④ Kurve der Torotope (Parallelkörper der Kreisscheibe)
⑤ Kurve der symmetrischen Kugellinsen

[1] W. BLASCHKE, l. c.

Die drei Ecken A, B und C des Kurvendreiecks sind die Diagrammpunkte der Strecke, der Kugel und der Kreisscheibe. Das Randstück AB des Diagramms, ein Parabelbogen, wird durch die Kappenkörper geliefert. Das Randstück BC, ein transzendenter Bogen, entspricht den Kugelzonen. Das Randstück CA, durch welches die vollständige Umschließung der Diagrammpunktmenge der Rotationskörper beendet wird, ist noch nicht bekannt.

Als recht instruktiv erweisen sich im Diagramm noch die Punktorte, welche gewissen Scharen elementarer Rotationskörper zukommen (vgl. Abb. 3 und Tafel).

H. HADWIGER, P. GLUR und H. BIERI

Mathematisches Seminar der Universität Bern, den 18. Juni 1948.

Summary

For a convex body in three dimensions let V be the volume, F the surface area, and M the total mean curvature.

The BRUNN-MINKOWSKI theory gives the following well-known result: Among all the convex bodies with V and F fixed the spherical cap-body gives the maximum of M.—The question regarding the minimum of M has not yet been solved for the general case.—The authors prove that the minimum of M is given by the symmetrical spherical zone, if we restrict our investigation to bodies of revolution.

Über die Synthese einiger Polychlorpolyene und die Atropisomerie der Oktachlorhexatriene[1]

Daß bestimmte Polyhalogenide im Sinne einer WURTZschen Synthese durch Metalle gekuppelt werden, hat als erster H. J. PRINS[2] am Hexachlorpropylen gezeigt. Mit Kupferbronze in Methanollösung stellte er daraus ein C_6Cl_8 vom Schmp. 183° dar, dessen Konstitution I oder II bisher nicht sicher entschieden wurde.

$CCl{\equiv}C{-}CCl_2{-}CCl_2{-}CCl{=}CCl_2$ (I) $CCl_2{=}CCl{-}CCl{=}CCl{-}CCl{=}CCl_2$ (II)

Bei Versuchen, die 1941–43 in der Chemisch-Technischen Reichsanstalt Berlin[3], an Reaktionssystemen aus hochchlorierten Paraffinen und Metallen wie Al, Zn und Mg durchgeführt wurden, sind nun neben totalen Dechlorierungen (Berger-Reaktionen) partielle Enthalogenierungen (IV–VII) beobachtet worden, die, soweit sie eine reaktive $-CCl_3$- bzw. $-CHCl_2$-Gruppe übrigließen, zu ganz ähnlichen Kupplungsreaktionen Anlaß gaben.

IV a) $CCl_3{-}CCl_3$ → b) $CCl_2{=}CCl_2$
V a) $CCl_3{-}CCl_2{-}CHCl_2$ → b) $CCl_2{=}CCl{-}CHCl_2$
VI a) $CCl_3{-}CHCl{-}CCl_3$ → b) $CCl_2{=}CH{-}CCl_3$
VII a) $CCl_3{-}CCl_2{-}CCl_3$ → b) $CCl_2{=}CCl{-}CCl_3$

Unter Verwendung von Aluminiumspänen in ätherischer Lösung sind so verschiedene stark ungesättigte Polychlorverbindungen der C_6-Reihe leicht zugänglich geworden.

[1] 2. Mitteilung «über Polyhalogenverbindungen»; 1. Mitteilung siehe Chem. Ber. *80*, 206 (1947). Die ausführliche Veröffentlichung dieser Arbeit folgt ebendort.

[2] H. J. PRINS, J. prakt. Chem. (2) *89*, 421 (1914); Rec. trav. chim. Pays-Bas *51*, 1065 (1932).

[3] Dem Präsidenten Herrn Professor Dr. W. RIMARSKI und dem Abteilungsvorstand Herrn Ob.-Reg.-Rat Dr. L. METZ † sei für die Unterstützung dieser Arbeit herzlich gedankt.